1.7.3 Rückstoss mit Raketenwagen

******

1 Motivation

Der Raketenwagen verwendet 15 Stahlkugeln als Treibstoff. Die dadurch bewirkten *diskreten* Beschleunigungsphasen verdeutlichen das Raketenprinzip auf eindrucksvolle Weise. Ein wunderschöner, äusserst empfehlenswerter Versuch!

2 Theorie

Der Raketenantrieb folgt aus der Impulserhaltung. Während sonst Kräfte im allgemeinen durch Stösse von aussen ausgeübt werden, die den Impuls auf eine konstante Masse übertragen, stösst die Rakete Masse mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ aus, welche einen Impuls $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ mit sich trägt und damit der Rakete einen entgegengesetzten Impuls $-\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ erteilt:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}m + \underbrace{m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}}_{\equiv 0} \qquad (1)$$

Eine Rakete erzeugt ihren **Schub** (= Kraft), indem Treibstoff verbrannt und das dadurch erzeugte Gas nach hinten ausgestossen wird. Die Rakete wird durch den Rückstoss nach vorne getrieben (Siehe Abb. 1).

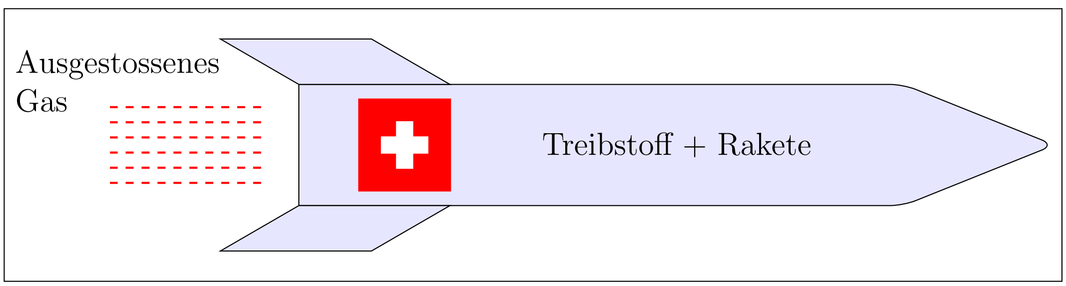

Abbildung 1: Prinzip des Raketenantriebs.

Wenn man Raketen in den Weltraum schiesst, drückt die Rakete gegen das Gas, das von ihr ausgestossen wird. Das Medium (d.h. Luft in der Nähe der Erdoberfläche) hat in diesem Fall nichts mit dem Antrieb zu tun!

Nun berechnen wir die sogenannte Raketengleichung. Wir benötigen dazu nur das Impulserhaltungsgesetz.

Wir definieren die folgenden Grössen:

a) $v(t)$ = Geschwindigkeit der Rakete zur Zeit t.

b) u = konstante Ausstossgeschwindigkeit des Gases relativ zur Rakete, und

c) $M(t)$ = Masse der Rakete zur Zeit t.

Wir berechnen die Impulsänderung des gesamten Systems während eines Zeitintervalls Δt. Wegen der Impulserhaltung muss die Impulsänderung gleich null sein (Wir nehmen an, dass keine äussere Kraft auf die Rakete wirkt).

Zur Zeit t bewege sich die Rakete mit der Anfangsgeschwindigkeit v.

Der Impuls der Rakete ist gleich

$$p(t) = M(t) \cdot v(t) \tag{2}$$

Nach der Zeit $\mathrm{d}t$ hat die Rakete eine Masse M–$\mathrm{d}m$ (wobei $\mathrm{d}m$ positiv ist und der Masse des ausgestossenen Gases entspricht) und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v + \mathrm{d}v$.

Wenn das Gas mit einer Geschwindigkeit u relativ zur Rakete ausgestossen wird, bewegt es sich relativ zum Laborsystem mit der Geschwindigkeit v–u .

Der Gesamtimpuls ist deshalb gleich

$$\begin{aligned} p(t + \mathrm{d}t) &= (M - \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v) + \mathrm{d}m(v - u) & (3)\\ \Rightarrow p(t + \mathrm{d}t) &= M\,v + M\,\mathrm{d}v - v\,\mathrm{d}m - \mathrm{d}m\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}m - u\,\mathrm{d}m & (4)\\ &\approx M\,v + M\,\mathrm{d}v - u\,\mathrm{d}m\,, & (5) \end{aligned}$$

wobei wir den Term $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$ weggelassen haben, weil er ein Produkt aus zwei sehr kleinen Grössen ist und daher im Vergleich zu den anderen Grössen vernachlässigbar ist.

Die Impulsänderung während des Zeitintervalls $\mathrm{d}t$ ist

$$\begin{aligned} p(t + \mathrm{d}t) - p(t) &\approx \{M\,v + M\,\mathrm{d}v - u\,\mathrm{d}m\} - M\,v\\ &\approx M\,\mathrm{d}v - u\,\mathrm{d}m\\ &\equiv 0\,, & (6) \end{aligned}$$

wobei wir die Impulserhaltung verwendet haben. Es gilt daher

$$\boxed{M\,\mathrm{d}v = u\,\mathrm{d}m \quad \Rightarrow \quad M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}} \tag{7}$$

Aus $M(\mathrm{d}v/\mathrm{d}t) = F$ folgt, dass auf die Rakete eine Schubkraft F wirkt, mit dem Betrag

$$\boxed{F = u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}} \tag{8}$$

und dass daher die Rakete beschleunigt wird.

Wir integrieren nun die Raketengleichung und erhalten

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{M}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \tag{9}$$

oder (mit $\mathrm{d}m = -\,\mathrm{d}M$)

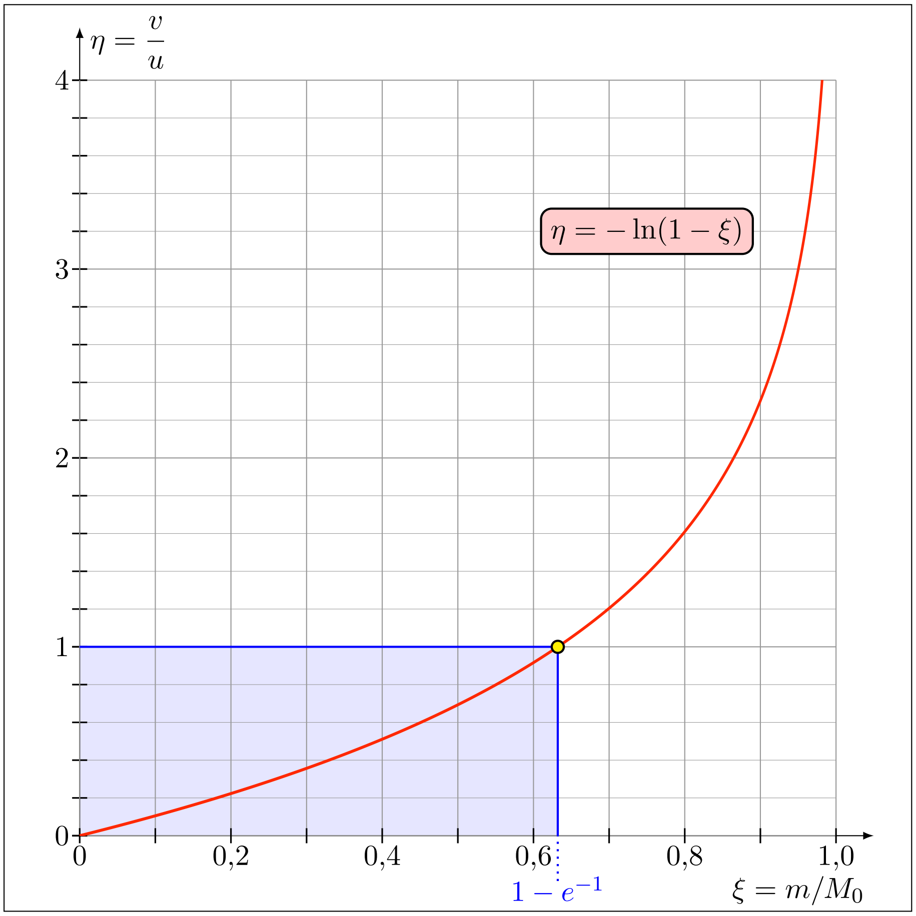

Abbildung 2: Relativgeschwindigkeit $\eta = v/u$ in Funktion von $\xi = m/M_0$, wobei u die Ausstossgeschwindigkeit und v die erreichte Raketengeschwindigkeit, M_0 die anfängliche Masse der Rakete und m die insgesamt ausgestossene Masse bedeuten.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = \int_{t_0}^{t} \frac{u}{M(t')}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' = -u\int_{t_0}^{t} \frac{1}{M(t')}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t'}\,\mathrm{d}t' \tag{10}$$

wobei wir angenommen haben, dass die Ausstossgeschwindigkeit des Gases **relativ zur Rakete** konstant ist, und dass die Masse des Gases aus der Abnahme der Masse der Rakete kommt. Damit gilt:

$$v(t) - v_0 = -u\int_{M_0}^{M(t)} \frac{\mathrm{d}M'}{M'(t)} = -u\left\{\ln\left(M_0 - m\right) - \ln M_0\right\} \tag{11}$$

wobei M_0 die Anfangsmasse der Rakete zur Zeit $t = t_0$ und m die Gesamtmasse des ausgestossenen Gases ist. Wir setzen im Weiteren die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ und führen die dimensionslosen Variablen

$$\eta(t) = \frac{v(t)}{u} \qquad \xi(t) = \frac{m(t)}{M_0} \tag{12}$$

ein.

Damit erhalten wir

$$\boxed{\eta(t) = -\ln(1-\xi)} \tag{13}$$

Diese Beziehung ist in Abb. 2 wiedergegeben.

Für den Fall $1/(1-\xi) > e$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\xi} > e \Rightarrow -\ln(1-\xi) > 1 \\ \Rightarrow \eta > 1 \qquad \Rightarrow v > u \end{aligned} \tag{14}$$

Dann bewegt sich für einen Beobachter das ausgestossene Gas *in der gleichen Richtung wie die Rakete.*

Abbildung 3: Der Raketenwagen beim Countdown. Bei $t = 0$ öffnet man die rückwärtige Klappe durch Ziehen der Schnur.

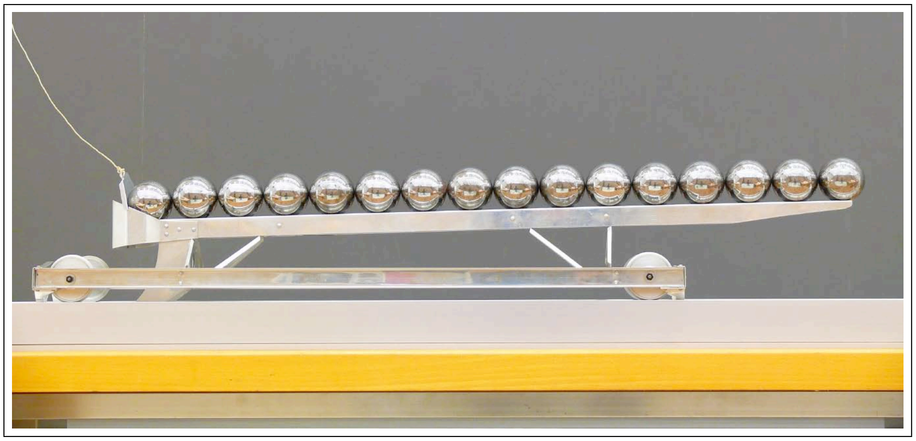

Abbildung 4: Der Raketenwagen

3 Experiment

Abb. 3 und Abb. 4 zeigen den Versuchsaufbau bzw. den Raketenwagen im Detail. Die Kugeln sind auf einer schiefen Rinne angebracht. Sobald mithilfe einer Schnur die rückwärtige Klappe entfernt wird, fällt eine Kugel nach der anderen nach unten und erteilt dem Wagen jeweils den gleichen Impulsübertrag. Abb. 5 schliesslich zeigt den Wagen in voller Aktion.

Die Bedingung $\xi > 1$ ist für die letzten beiden Kugeln gegeben, die somit in Richtung der Raketengeschwindigkeit herunterfallen! Die grösste Beschleunigung ergibt sich für die letzte Kugel; der Wagen schiesst dann förmlich nach vorne.

Man sollte die Studenten unbedingt darauf aufmerksam machen und den Versuch auch wiederholen, da wegen der zunehmenden Geschwindigkeit des Raketenwagens beim ersten Mal nicht alle Effekte wahrgenommen werden!

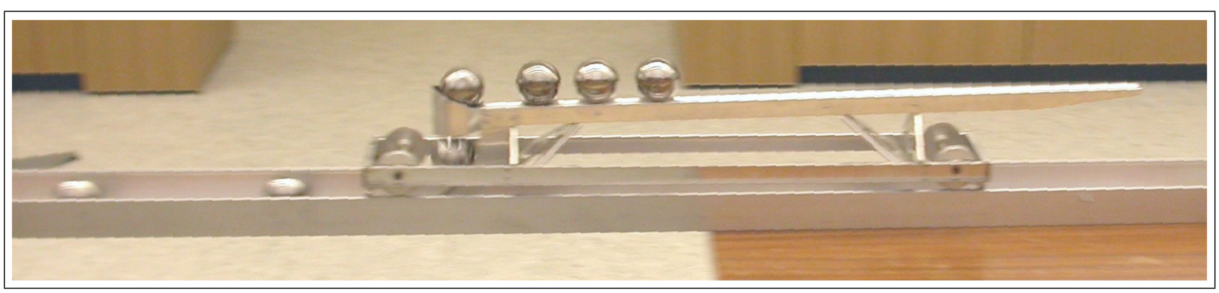

Abbildung 5: Der Raketenwagen in Aktion